ສາທາລະນະລັດ ປະຊາທິປະໄຕ ປະຊາຊົນລາວ

ສັນຕິພາບ ເອກະລາດ ປະຊາທິປະໄຕ ເອກະພາບ ວັດທະນະຖາວອນ

ກະຊວງສຶກສາທິການ ແລະ ກິລາ

ກົມມັດທະຍົມສຶກສາ

ຫົວບົດສອບເສັງແຂ່ງຂັນນັກຮຽນເກັ່ງ ຊັ້ນມັດທະຍົມສຶກສາຕອນປາຍ

ລະດັບຊາດ ປະຈຳສົກຮຽນ 2016-2017

ວິຊາ ຄະນິດສາດ ເວລາ: 120 ນາທີ

1. ໃຫ້ຈຳນວນຖ້ວນ x ແລະ y ຖ້າວ່າ: $5|(x+9y)$ ຈົ່ງພິສູດວ່າ: $5|(8x+7y)$

2. ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງ: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$

3. ໃຫ້ (a_n) ເປັນອັນດັບທະວີບວກ ເຊິ່ງວ່າ $a_2+a_3+\ldots+a_9=100$

   ຈົ່ງຊອກຫາ $a_1+a_2+a_3\ldots+a_{10}$

4. ຈົ່ງຊອກຫາບັນດາໃຈຜົນຂອງສົມຜົນ: $\int_0^x \cos(t-x^2)dt=\sin x$

5. ໃຫ້ $\begin{pmatrix}\sin x & \cos x\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos x & \sin(x+y)\\ \sin x & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1\end{pmatrix}$ ແລະ $0\le x\le 180^\circ$, $0\le y\le 180^\circ$

   ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງ x ແລະ y

6. ຈົ່ງພິສູດວ່າ: $\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 8x}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot x-\cot 2^n x$; ສຳລັບ $n\in\mathbb{N}$

7. ຈົ່ງຊອກຫາຕົວປະສານຂອງເມັດຕັດກັນລະຫວ່າງໜ້າພຽງ $P: 2x+y-5z=1$ ແລະ ເສັ້ນຊື່ (AB)

   ເຊິ່ງວ່າ: $A(1;-5;0)$ ແລະ $B(4;1;3)$

8. ຈະສາມາດສ້າງຈຳນວນທີ່ປະກອບດ້ວຍ 10 ຕົວເລກເຊິ່ງວ່າຕົວເລກທຸກຕົວແມ່ນ 2 ຫຼື 3 ໄດ້ຈັກຈຳນວນ? ໃນນັ້ນ ຕົວເລກ 3 ບໍ່ສາມາດຢູ່ຖັດກັນໄດ້.

ຄະນະກຳມະການອອກຫົວບົດ

ຂະໜານຕອບທົວບົດສອບເສັງແຂ່ງຂັນນັກຮຽນເກັ່ງຊັ້ນມັດທະຍົມສຶກສາຕອນປາຍ

ລະດັບຊາດປະຈໍາສົກຮຽນ 2016-2017

ຂໍ້	ຂະໜານຕອບ
1	ໃຫ້ຈໍານວນຖ້ວນ x ແລະ y ຖ້າວ່າ : $5\|(x+9y)$ ຈົ່ງພິສູດວ່າ $5\|(8x+7y)$
	$8x+7y$ $=3x+5x+27y-20y$ $=3(x+9y)+5(x-4y)$ ຍ້ອນວ່າ $5\|(x+9y)$ ແລະ $5\|5(x-4y)$ ດັ່ງນັ້ນ $5\|(8x+7y)$
2	ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງ: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$
	$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=i$ ດັ່ງນັ້ນ; $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$ $=i+i^2+i^3+\ldots+i^{2017}=\frac{i\left(1-i^{2017}\right)}{1-i}=i$
3	ໃຫ້ (a_n) ເປັນອັນດັບທະວີບວກ ເຊິ່ງວ່າ $a_2+a_3+\ldots+a_9=100$ ຈົ່ງຊອກຫາ $a_1+a_2+a_3\ldots+a_{10}$
	$a_2=a_1+d$ $a_3=a_1+2d$ $a_9=a_1+8d$ $\Rightarrow a_2+a_3+\ldots+a_9=8a_1+36d=100$ $\Leftrightarrow 2a_1+9d=25$ $a_1+a_2+a_3\ldots+a_{10}=\frac{10}{2}(2a_1+9d)=5.25=125$
4	ຈົ່ງຊອກຫາບັນດາໃຈຜົນຂອງສົມຜົນ: $\int_0^x \cos\left(t-x^2\right)dt=\sin x$
	ຈາກຟາກຊ້າຍຂອງສົມຜົນໄດ້ $\int_0^x \cos\left(t-x^2\right)dt=\left[\sin\left(t-x^2\right)\right]_0^x=\sin\left(x-x^2\right)+\sin\left(x^2\right)$ ສົມຜົນຜັນປ່ຽນເປັນ: $\sin\left(x-x^2\right)+\sin\left(x^2\right)=\sin x$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{x-x^2+x^2}{2}\right)\cos\left(\frac{x-x^2-x^2}{2}\right)=\sin x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\left(\frac{x}{2}-x^2\right)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}\left[\cos\left(\frac{x}{2}-x^2\right)-\cos\frac{x}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}\left[-2\sin\left(\frac{\frac{x}{2}-x^2+\frac{x}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{x}{2}-x^2-\frac{x}{2}}{2}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x^2}{2}\sin\left(\frac{x-x^2}{2}\right)=0$$

$\sin\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}=\sin 0 \Rightarrow x=2k\pi$ ສຳລັບ $(k\in Z)$

$\sin\frac{x^2}{2}=0 \Leftrightarrow \sin\frac{x^2}{2}=\sin 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}=k\pi \Rightarrow x=\sqrt{2k\pi}$ ສຳລັບ $(k=0,1,2,3,\ ....)$

$\sin\frac{x-x^2}{2}=0 \Leftrightarrow \sin\frac{x-x^2}{2}=\sin 0$

$$\Rightarrow x-x^2=2k\pi \Leftrightarrow x^2-x+2k\pi=0$$

$$\Delta=1-8k\pi$$

ເພື່ອຢາກໃຫ້ສົມຜົນມີໃຈຜົນແມ່ນ

$\Delta=1-8k\pi\ge 0 \Leftrightarrow k\le\frac{1}{8\pi}$ ໝາຍວ່າ $(k=0,-1,-2,-3,\ ....)$

ເມື່ອນັ້ນ $x=\frac{1\pm\sqrt{1-8k\pi}}{2}$

5

ໃຫ້ $\begin{pmatrix}\sin x & \cos x\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos x & \sin(x+y)\\ \sin x & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1\end{pmatrix}$ ແລະ $0\le x\le 180^\circ$, $0\le y\le 180^\circ$ ຈົ່ງ

ຊອກຫາຄ່າຂອງ x ແລະ y

$$\begin{pmatrix}\sin x & \cos x\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos x & \sin(x+y)\\ \sin x & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\sin x\cos x+\cos x\sin x & \sin x\sin(x+y)\\ \cos x & \sin(x+y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1\end{pmatrix}$$

	$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2\sin x\cos x & \sin x\sin(x+y) \\ \cos x & \sin(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$ ເຮົາໄດ້: $2\sin x\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (1) $\sin x\sin(x+y) = \frac{1}{2}$ (2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\sin(x+y) = 1$ (4) ເອົາ (4) ແທນໃສ່ (2) ໄດ້ $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin 30^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$ ເອົາຄ່າຂອງ $x = 30^\circ$ ແທນໃສ່ (4) ໄດ້ $\sin(30^\circ + y) = 1 \Leftrightarrow \sin(30^\circ + y) = \sin 90^\circ$ $\Leftrightarrow 30^\circ + y = 90^\circ \Rightarrow y = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$
6	ຈົ່ງພິສູດວ່າ: $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$; ສຳລັບ $n \in \mathbb{N}$
	ສຳລັບ $x \neq \frac{\pi Z}{2^k}$ $k \in \mathbb{N}$ $n \in \mathbb{N}$ ພວກເຮົາພຽງແຕ່ພິສູດວ່າ: $\frac{1}{\sin 2^k x} = \cot 2^{k-1} x - \cot 2^k x$ • ເມື່ອ $k = 1$ ເຮົາໄດ້: $\cot x - \cot 2x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\cos^2 x - \cos 2x}{\sin 2x}$ $= \frac{2\cos^2 x - 2\cos^2 x + 1}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x}$ • ສົມມຸດວ່າ $\frac{1}{(\sin 2^k x)} = \cot 2^{(k-1)} x - \cot 2^k x$ ເປັນຈິງສຳລັບ $k \in \mathbb{N}$ • ເຮົາມີ : $\cot 2^k x - \cot 2^{(k+1)} x = (\cos 2^k x)/(\sin 2^k x) - (\cos 2^{(k+1)} x)/(\sin 2^{(k+1)} x)$ $= \frac{\cos 2^k x \sin 2^{k+1} x - \cos 2^{k+1} x \sin 2^k x}{\sin 2^k x \sin 2^{k+1} x}$ $= \frac{\sin(2^{k+1} - 2^k) x}{\sin 2^k x \sin 2^{k+1} x} = \frac{1}{\sin 2^{k+1} x}$ ດັ່ງນັ້ນ: $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$ ສຳລັບ $n \in \mathbb{N}$
7	ຈົ່ງຊອກຫາຕົວປະສານຂອງເມັດຕັດກັນລະຫວ່າງໜ້າພຽງ $P: 2x + y - 5z = 1$ ແລະ ເສັ້ນຊື່ (AB) ເຊິ່ງວ່າ: $A(1;-5;0)$ ແລະ $B(4;1;3)$
	ເວັກເຕີຕັ້ງສາກຂອງໜ້າພຽງ P ແມ່ນ : $\vec{n}(2;1;-5)$ ເວັກເຕີກຳນົດລວງຂອງເສັ້ນຊື່ (AB) ແມ່ນ: $\vec{u}(1;2;1)$

<table>
<tr><td></td><td>$\vec{n}.\vec{u} = 2\times1+1\times2+1\times(-5) = -1 \neq 0$ ສະນັ້ນ ໜ້າພຽງ ແລະ ເສັ້ນຊື່ຕັດກັນ
ເສັ້ນຊື່ $(\mathbf{AB})$ ຂຽນໃນຮູບຮ່າງພາຣາແມທຣິກ $\begin{cases} \mathbf{x=1+k} \\ \mathbf{y=-5+2k} \quad ; \quad k\in\mathbb{R} \\ \mathbf{z=k} \end{cases}$
ເມື່ອເອົາໄປແທນເຂົ້າສົມຜົນໜ້າພຽງໄດ້ $\mathbf{k=-4}$ ຖອນໄດ້ $\mathbf{x=-3; y=-13\ z=-4}$
ຕົວປະສານຂອງເມັດຕັດກັນລະຫວ່າງໜ້າພຽງ$\mathbf{P}$ ແລະ ເສັ້ນຊື່$(\mathbf{AB})$ ແມ່ນ $(\mathbf{-3;-13;-4})$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>ຈະສາມາດສ້າງຈຳນວນທີ່ປະກອບດ້ວຍ **10** ຕົວເລກເຊິ່ງວ່າຕົວເລກທຸກຕົວແມ່ນ 2 ຫຼື 3 ໄດ້ຈັກ ຈຳນວນ? ໃນນັ້ນ ຕົວເລກ 3 ບໍ່ສາມາດຢູ່ຖັດກັນໄດ້</td></tr>
<tr><td></td><td>• ສົມມຸດເປັນຈຳນວນທີ່ມີ 1 ຕົວເລກທີ່ສ້າງຈາກ 2 ຫຼື 3; ເຮົາສ້າງໄດ້ 2 ຈຳນວນ ຄື: 2 ຫຼື 3
• ສົມມຸດເປັນຈຳນວນທີ່ມີ 2 ຕົວເລກທີ່ສ້າງຈາກ 2 ຫຼື 3; ເຮົາສ້າງໄດ້ 3 ຈຳນວນ ຄື: 22 ຫຼື 23 ຫຼື 32
• ສົມມຸດເປັນຈຳນວນທີ່ມີ 3 ຕົວເລກທີ່ສ້າງຈາກ 2 ຫຼື 3; ເຮົາສ້າງໄດ້ 5 ຈຳນວນ ຄື: 222 ; 223 ; 232 ; 322 ຫຼື 323
ສົມມຸດເປັນຈຳນວນທີ່ມີ 4 ຕົວເລກທີ່ສ້າງຈາກ 2 ຫຼື 3; ເຮົາສ້າງໄດ້ 8 ຈຳນວນ ຄື: 2222 ; 2223 ; 2232 ; 2322 ; 3222 ; 3232 ; 3223 ຫຼື 2323
ສັງເກດເຫັນວ່າການເພີ່ມຂຶ້ນຂອງຈຳນວນທີ່ສ້າງໄດ້ເປັນໄປຕາມອັນດັບຂອງ Fibonacci
• ຄື: 2 ;3 ;5 ;8 ;13 ;21 ;34 ;55 ;89 ;144 ທີ່ມີພົດທີ 10 ເທົ່າ 144
ສະນັ້ນ; ຈຳນວນທີ່ປະກອບດ້ວຍ 10 ຕົວເລກເຊິ່ງວ່າຕົວເລກທຸກຕົວແມ່ນ 2 ຫຼື 3 ໄດ້ 144 ຈຳນວນ ໃນນັ້ນ ຕົວເລກ 3 ບໍ່ຢູ່ຖັດກັນ.</td></tr>
</table>